SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT — TD 5

Maximum de Vraisemblance

Comprendre comment estimer la fiabilité d'un système à partir de pannes observées.

01 / MISE EN CONTEXTE

Pourquoi utilise-t-on cet outil ?

Sur le terrain, on observe des pannes réelles mais la vraie loi mathématique de la machine est inconnue.

1. Observation terrain

Relevé des temps de panne sur nos équipements.

2. Le problème

Quel est le vrai taux de défaillance de la machine ?

3. La solution EMV

Trouver la valeur qui explique le mieux nos observations.

02 / DÉFINITIONS ET FORMULES

Comment ça marche mathématiquement ?

Lexique de la formule

n : Nombre de pannes observées.

xi : Donnée observée (ex: heure de la panne i).

θ (Thêta) : Paramètre inconnu qu'on cherche.

f(xi ; θ) : Probabilité d'observer xi avec θ.

1. VRAISEMBLANCE (ON MULTIPLIE LES PROBABILITÉS)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)$$

2. ASTUCE DU LOGARITHME (TRANSFORME LE PRODUIT EN SOMME)

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f(x_i ; \theta))$$

3. RECHERCHE DU MAXIMUM (SOMMET DE LA COURBE = DÉRIVÉE NULLE)

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = 0$$

03 / FIABILITÉ DE L'OUTIL

Pourquoi avoir confiance dans ce résultat ?

1. Convergence garantie

Plus on a de données, plus on tombe sur la vraie valeur.

2. Sans erreur systématique

Ne surestime ni ne sous-estime la réalité à grande échelle.

3. Précision maximale

Marge d'erreur minimale parmi tous les outils existants.

4. Intervalle de confiance facile

Se comporte comme une loi normale permettant d'encadrer l'erreur.

04 / EXEMPLE D'UTILISATION

Application à la Loi Exponentielle

On cherche le taux de panne **λ** à partir des durées de vie observées **(t1, t2, ..., tn)**.

ÉTAPE 1

Formule d'une panne

$$f(t_i ; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t_i}$$

Loi exponentielle classique.

ÉTAPE 2

Somme avec ln

$$n \ln(\lambda) - \lambda \sum t_i$$

Simplification de l'exponentielle.

ÉTAPE 3

Dérivée = 0

$$\frac{n}{\lambda} - \sum t_i = 0$$

On cherche le pic de probabilité.

RÉSULTAT

Taux estimé

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum t_i} = \frac{1}{\text{Moyenne}}$$

Inverse du temps moyen (MTTF).

EXEMPLE CONCRET : 5 POMPES TOMBENT EN PANNE EN MOYENNE À 200 H

$\lambda = 1 / 200 = 0{,}005$ panne/h

Le calcul par maximum de vraisemblance prouve que la meilleure estimation du taux de panne est tout simplement l'inverse de la durée de vie moyenne observée.

À retenir : Un outil mathématique rigoureux qui donne un résultat concret et intuitif.