Le Test de Kolmogorov-Smirnov

Principe, fiabilité mathématique et cas d'usage pratique

STATISTIQUE NON PARAMÉTRIQUE

1. Principe & Formulation Mathématique

Le test de **Kolmogorov-Smirnov (K-S)** évalue si un échantillon empirique suit une loi théorique continue $F_0(x)$ (1 échantillon) ou si deux échantillons ont la même loi (2 échantillons).

1. Fonction Empirique (ECDF) :

$$F_n(x) = (1 / n) \times \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty, x]}(X_i)$$

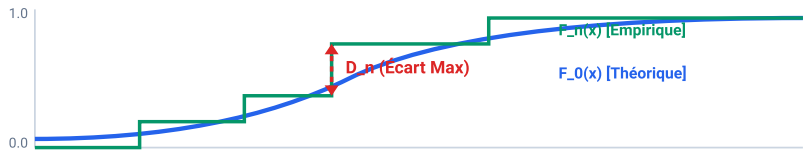
Proportion des observations inférieures ou égales à *x*.

2. Statistique de Ecart D_n :

$$D_n = \sup_x | F_n(x) - F_0(x) |$$

Rejet de H_0 si $D_n > D_{critique}$ au seuil α.

2. Représentation Graphique de l'Écart D_n



3. Éléments Donnant Confiance dans la Justesse du Test

DISTRIBUTION-FREE

Indépendant

La loi de D_n sous H_0 est universelle pour toute loi continue F_0.

GLIVENKO-CANTELLI

Convergence

Garantie théorique : F_n tend uniformément vers F_0 quand $n \to \infty$.

SANS GROUPEMENT

Exactitude

Aucune perte d'information liée au découpage en classes (contrairement au χ^2).

4. Exemple d'Application : Test d'Adéquation à N(μ=10, σ²=4)

Pour **n = 5** observations triées : *X = {7.5, 8.8, 10.1, 11.4, 13.0}*.

i	Mesure x_i	$F_0(x_i)$ [N(10,4)]	$F_n(x_i) = i/5$	$F_n(x_{i-1}) = (i-1)/5$	Écart Max $\lvert F_n - F_0 \rvert$
1	7.5	0.1056	0.2000	0.0000	0.1056
2	8.8	0.2743	0.4000	0.2000	0.1257
3	10.1	0.5199	0.6000	0.4000	0.1199
4	11.4	0.7580	0.8000	0.6000	**0.1580 (Max)**
5	13.0	0.9332	1.0000	0.8000	0.1332

Décision Statistique (α = 5%) :
$D_{calculé}$ **= 0.1580** vs $D_{critique}(n=5)$ **= 0.563**.
Puisque 0.1580 ≤ 0.563, on **ne rejette pas H_0**. L'hypothèse de normalité est acceptée.

Condition d'Application :
Les paramètres (μ, σ) doivent être définis *a priori*. S'ils sont estimés sur les données, utiliser le test adapté de **Lilliefors**.