Sûreté de Fonctionnement

L'Intervalle de Confiance pour la Loi Exponentielle

Groupe : Spice Girl

28 Octobre 2026

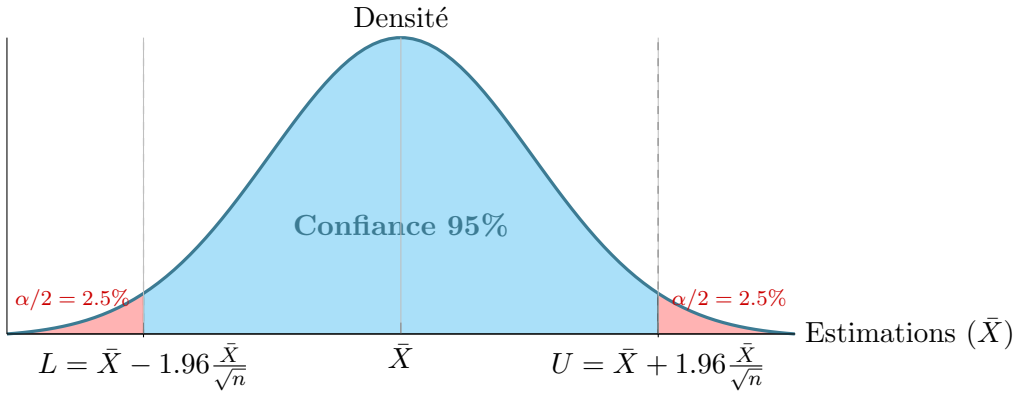
Présentation de l'équipe : Spice Girl

Ce document de synthèse a été conçu par le groupe **Spice Girl** pour expliquer de manière simple, intuitive et mathématiquement rigoureuse le concept d'intervalle de confiance appliqué à la loi exponentielle en Sûreté de Fonctionnement.

1 Le But : Enquêter pour retrouver une valeur inconnue (μ)

En statistiques et en fiabilité, on cherche toujours à estimer une valeur physique que l'on ne connaît pas théoriquement (ex : la vraie durée de vie moyenne d'un composant électronique ou d'une ampoule).

1. **La Vraie Valeur (Inconnue) = Le "Coupable" caché :** Notée μ (la vraie moyenne théorique de toute la population, ou θ de manière générale). Elle est fixe, mais impossible à mesurer directement (on ne peut pas tester toutes les ampoules du monde !).
2. **L'Échantillon (Connu) = Les "Indices" sur le terrain :** On réalise un test limité (ex : $n = 3$ mesures). On calcule leur moyenne observée : $\bar{X} = 4$ ans. C'est notre unique piste.
3. **L'Intervalle de Confiance = Le "Filet" pour attraper le coupable :** On sait que notre indice $\bar{X}$ n'est pas parfait à cause du hasard. On jette donc un "filet" $[L; U]$ autour de lui. On est sûrs à 95% que la vraie moyenne μ se trouve dans ce filet !



2 Le Principe & Les Formules

L'intervalle de confiance $[L; U]$ est la plage de valeurs située sous la zone centrale de la courbe (95% de l'aire totale). On accepte un petit risque d'erreur $\alpha = 5\%$ aux extrémités.

Formule de l'Intervalle de Confiance (Loi Exponentielle)

Pour un échantillon de taille $n \geq 30$, l'écart-type d'une loi exponentielle est égal à sa moyenne ($\sigma = \mu$). On estime donc l'écart-type $S \approx \bar{X}$. L'intervalle à 95% de confiance est :

$$\text{IC}_{95\%}(\mu) = \left[\bar{X} - 1.96\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + 1.96\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}}\right]$$

3 6 Exemples Concrets d'Utilisation de la Loi Exponentielle

La loi exponentielle est incontournable pour modéliser le temps qui s'écoule avant qu'un événement n'arrive :

- **1. Le Temps d'Attente au Fast-Food :** Temps passé dans la file avant d'être servi.
- **2. La Durée de Vie des Composants Électroniques :** Panne d'une puce ou d'une LED. Propriété sans mémoire : un composant ne s'use pas mécaniquement, il tombe en panne par accident de manière imprévisible.
- **3. Les Appels dans un Centre d'Assistance :** Temps s'écoulant entre deux appels reçus.
- **4. La Désintégration Radioactive :** Base physique du concept de demi-vie des atomes instables.
- **5. L'Arrivée des Bus à un Arrêt :** Attente d'un bus arrivant de manière irrégulière.
- **6. Les Intervalles entre deux Séismes :** Temps de calme sismique pour évaluer les risques.

4 Pourquoi peut-on avoir confiance dans cette estimation ? (3 Piliers)

1. **La Consistance (Loi des Grands Nombres) :** Plus n (taille de l'échantillon) augmente, plus le filet se resserre grâce au terme $\sqrt{n}$ au dénominateur. Moins d'incertitude !
2. **L'Efficacité (Dispersion minimale) :** La moyenne empirique $\bar{X}$ est mathématiquement le meilleur estimateur possible. C'est le plus stable et robuste d'un échantillon à un autre.
3. **Le Théorème Central Limite (TCL) :** Même si les données individuelles suivent une loi exponentielle très asymétrique, leur moyenne $\bar{X}$ suit toujours une Loi Normale (courbe en cloche symétrique) dès que $n \geq 30$. C'est ce qui valide l'utilisation du coefficient 1.96.