FICHE SYNTHÉTIQUE : LA LOI DE WEIBULL

Sûreté de fonctionnement, fiabilité et modélisation des durées de vie

1. DÉFINITIONS & FORMULATIONS MATHÉMATIQUES (t ≥ 0)

Paramètres fondamentaux	• β (ou k) > 0 : Forme (sans dimension) — dicte le mode de défaillance. • η (ou λ) > 0 : Échelle (unité de temps) — vie caractéristique (F(η) ≈ 63,2 %).
Fonction de répartition F(t)	$F(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}$ (Probabilité de défaillance cumulée avant l'instant t)
Fiabilité / Survie R(t)	$R(t) = 1 - F(t) = e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}$ (Probabilité de bon fonctionnement à l'instant t)
Densité de probabilité f(t)	$f(t) = (\frac{\beta}{\eta})(\frac{t}{\eta})^{(\beta-1)} e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}$
Taux d'avarie instantané λ(t)	$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = (\frac{\beta}{\eta})(\frac{t}{\eta})^{(\beta-1)}$

2. INTÉRÊT THÉORIQUE & IMPACT DU PARAMÈTRE DE FORME (β)

La loi de Weibull couvre à elle seule l'intégralité de la courbe en baignoire du cycle de vie industriel :

Valeur de β	Taux λ(t)	Phase de vie	Interprétation physique & Modélisation
β < 1	Décroissant	Jeunesse / Rodage	Défauts de fabrication, erreurs d'assemblage ou de matière prématurés.
β = 1	Constant (= 1/η)	Maturité / Utile	Pannes aléatoires dues à l'environnement. Équivaut à la loi exponentielle.
β > 1	Croissant	Vieillesse / Usure	Fatigue mécanique, abrasion, usure d'outils, vieillissement (loi normale si β ≈ 3,5).

3. EXEMPLE CONCRET D'APPLICATION : ROULEMENTS DE BROCHE D'USINAGE

Contexte : Suivi en fiabilité de broches de décolletage soumises à usure continue.

- **Paramètres identifiés :** β = 2,5 (régime d'usure prononcée / fatigue) et η = 5 000 h (durée de vie caractéristique).
- **Temps Moyen Avant Panne (MTTF) :** MTTF = η · Γ(1 + 1/β) = 5 000 · Γ(1,4) ≈ 4 435 heures.
- **Durée de vie nominale B10 (90 % de survie / 10 % de rebut) :** t10 = η · [-ln(0,90)]^(1/β) = 5 000 · (0,1053)^0,4 ≈ 2 030 heures.
- **Décision industrielle :** Planification d'un remplacement préventif systématique à 2 000 h pour garantir un niveau de défaillance inférieur à 10 % sur ligne.

Avec Γ la fonction gamma (une généralisation de la factorielle sur R+) déféinie par:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\, ou\ encore\ \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-x} dt$$