Étude de Loi : La Loi Normale

1 Définitions (formulations, paramètres, graphiques)

Paramètres : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- **μ (Moyenne) :** centre de gravité / instant de défaillance moyen.
- **σ (Écart-type) :** dispersion des pannes autour de la moyenne (σ > 0).

Densité *f(t)* :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Répartition *F(t)* :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$$

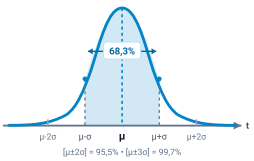
Fiabilité *R(t)* :

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t) = \int_{t}^{+\infty} f(u)\,du$$

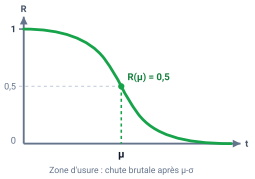
Taux de panne λ(t) :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$ (strictement ↗)

Densité *f(t)* (Courbe de Gauss)



Fiabilité *R(t)* = 1 - *F(t)*



2 Intérêt théorique (cas typique d'utilisation, impact des paramètres)

Cas typique d'utilisation en SdF

- **Vieillissement et usure pure :** modélise les matériels qui s'usent avec l'âge (frottement, érosion, fatigue mécanique).
- **Théorème Central Limite (TCL) :** justification physique majeure ; la dégradation résulte de la somme d'une multitude d'aléas élémentaires indépendants (micro-chocs, tolérances, contraintes thermiques).
- **Taux de panne λ(t) strictement croissant :** correspond à la phase terminale de la "courbe en baignoire" (zone d'obsolescence/usure).

Impact des paramètres sur le système

- **Impact de μ :** translate la courbe. Il fixe la durée de vie nominale moyenne (MTTF = μ par symétrie).
- **Impact de σ :** règle la hauteur et l'étalement de la cloche. Un σ faible indique une usure très prévisible (processus régulier) ; un σ fort traduit une forte incertitude de fabrication.
- **Règle de validité physique (μ ≥ 3σ) :** la loi normale va de -∞ à +∞. Pour éviter l'anomalie de durées de vie négatives (t < 0), on impose μ ≥ 3σ (la probabilité que t < 0 devient alors inférieure à 0,13 %).

3 Exemple concret où elle s'applique

Système étudié : Roulements à billes de broche d'usinage haute cadence soumis à une fatigue de contact cyclique. Le temps avant défaillance par écaillage suit une loi normale de paramètres **μ = 5 000 h** et **σ = 400 h** (vérifiant bien μ = 12,5 σ >> 3σ).

μ = 5 000 h	**t_{mp} = 4 200 h**	**R(t) = 97,7 %**
Durée de vie moyenne nominale	Seuil de remplacement (μ - 2σ)	Fiabilité garantie avant arrêt

Application à la politique de maintenance préventive :
Sans maintenance préventive, 50 % des broches casseraient en cours de production avant 5 000 h. En appliquant la loi normale, l'ingénieur fixe le remplacement systématique à **t = μ - 2σ = 4 200 h**. Ce compromis optimise le coût : on exploite 84 % de la durée de vie potentielle du roulement tout en limitant le risque de panne imprévue en atelier à seulement **2,3 %** (car F(4 200) ≈ 0,0228).