Étude de la Loi Log-normale en Sûreté de Fonctionnement

Rédigé par : Mariame Ourradi & Grégoire Cognacq

27 octobre 2026

1. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

La loi log-normale est une loi de probabilité continue modélisant une variable aléatoire positive dont le logarithme suit une loi normale. Soit $T > 0$ la variable aléatoire représentant la durée de fonctionnement avant la première défaillance. On note $T \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ si $Y = \ln(T) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec :

— $\mu \in \mathbb{R}$: paramètre d'échelle (moyenne de la variable transformée $\ln(T)$).

— $\sigma > 0$: paramètre de forme (écart-type de la variable transformée $\ln(T)$).

La **densité de défaillance** $U(t)$ (équivalente à $f(t)$) pour $t > 0$ et la **fonction de répartition** $F(t) = P(T \leq t)$ s'expriment à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Φ :

$$U(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{et} \quad F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \tag{1}$$

2. INDICATEURS DE SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT

Selon les définitions du cours, les grandeurs fondamentales de la fiabilité pour le système sont :

— **La Fiabilité** $R(t)$ **:** Probabilité que le système fonctionne à l'instant t : $R(t) = 1 - F(t) = \Phi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)$.

— **Le Taux de défaillance instantané** $h(t)$ **:** Probabilité instantanée de défaillance sachant que le système est fonctionnel jusqu'à l'instant t :

$$h(t) = \frac{U(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)} \tag{2}$$

3. INTÉRÊT THÉORIQUE, PARAMÈTRES ET GRAPHIQUES

La loi log-normale possède une propriété de non-monotonie unique : son taux de défaillance $h(t)$ commence à 0 pour $t = 0$, croît jusqu'à atteindre un **maximum global** (phase d'usure précoce), puis décroît très lentement pour tendre vers 0 quand $t \to \infty$. Le paramètre de forme σ contrôle l'asymétrie de la distribution.

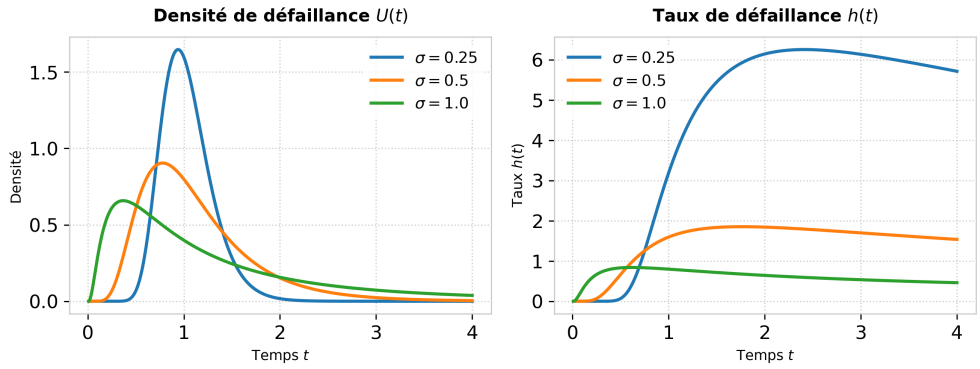


FIGURE 1 – Évolution de la densité $U(t)$ et du taux de défaillance $h(t)$ selon le paramètre σ ($\mu = 0$).

4. EXEMPLES CONCRETS D'APPLICATION

La loi log-normale est indispensable dans deux cas physiques et industriels majeurs :

1. **Fatigue des structures et croissance de fissures :** Sous des charges cycliques, la vitesse d'agrandissement d'une fissure est proportionnelle à sa taille instantanée (loi de croissance multiplicative). Le temps requis pour qu'une fissure atteigne sa longueur critique de rupture suit donc une loi log-normale.
2. **Temps de maintenance curative (MTTR) :** Lors des opérations de maintenance, la majorité des interventions sont rapides et simples (faible durée), mais quelques pannes complexes génèrent une longue traîne de diagnostic et réparation. Ce profil asymétrique est idéalement modélisé par la loi log-normale.