La loi exponentielle

Sûreté de fonctionnement - TD4 | Fiche pour la présentation orale

COMTE Théo · LASCAUX Clément · MILLOT Baptiste

1. À quoi sert cette loi ?

Elle sert à calculer la probabilité qu'un équipement fonctionne encore après une certaine durée. On note **T** le temps jusqu'à sa première panne et **t** la durée étudiée. On suppose que les pannes surviennent au hasard, avec un **taux de défaillance constant** : l'équipement ne devient pas plus fragile avec l'âge dans ce modèle.

2. Le paramètre λ et les formules à connaître

λ mesure la fréquence des défaillances parmi les équipements encore en fonctionnement. Si le temps est en heures, λ est en h^{-1}. **Plus λ est grand, plus les pannes arrivent tôt.** On écrit $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$ et $t \geq 0$.

Fiabilité	$\mathbf{R(t) = e^{-\lambda t}}$	Probabilité de fonctionner encore à t.
Répartition	$\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$	Probabilité d'être tombé en panne avant t.
Densité	$\mathbf{f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}}$	Décrit la répartition des durées de vie.
Taux de panne	$\mathbf{h(t) = f(t)/R(t) = \lambda}$	Reste constant au cours du temps.
Durée moyenne	$\mathbf{MTTF = 1/\lambda}$	Temps moyen avant la première panne.

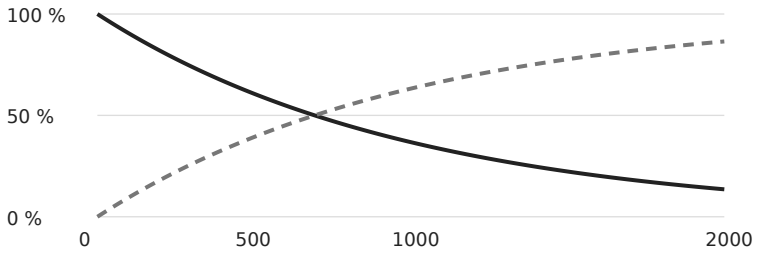
Attention : f(t) n'est pas une probabilité à un instant précis. La probabilité d'une panne entre deux dates correspond à l'aire sous la courbe de f entre ces dates. Le nombre e vaut environ 2,718.

3. Exemple : une presse industrielle

On suppose que les pannes aléatoires d'une presse suivent cette loi avec $\boldsymbol{\lambda = 0{,}001\ h^{-1}}$. Quelle est la probabilité qu'elle fonctionne 500 heures sans panne ?

$$\mathbf{R(500) = e^{-0{,}001 \times 500} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065 = 60{,}65\ \%}$$

Sur un grand nombre de presses identiques, environ **61 %** fonctionneraient encore à 500 h et **39 %** seraient déjà tombées en panne. Le **MTTF vaut 1/0,001 = 1 000 h** : c'est une moyenne, pas une date de panne prévue.



Lire le graphique
Trait plein : R(t), la part qui fonctionne encore, diminue.
Pointillés : F(t), la part déjà en panne, augmente.
À chaque instant : R(t) + F(t) = 1.

4. Conclusion

La loi exponentielle décrit les **pannes aléatoires à taux constant**, par exemple de composants électroniques en fonctionnement stable. Un seul paramètre λ suffit : **MTTF = 1/λ**. Si λ double, la durée moyenne avant panne est divisée par deux.

Elle est **sans mémoire** : avoir déjà fonctionné ne change pas les chances de tenir une durée supplémentaire. Notre presse ayant tenu 500 h a encore 60,65 % de chances de tenir les 500 h suivantes : $P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Ce modèle simplifie les calculs de fiabilité, mais **ne décrit ni l'usure ni le vieillissement**. Si le risque varie avec l'âge, une autre loi, comme celle de Weibull, est plus adaptée.