La Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

1 Définition Mathématique & Formulations

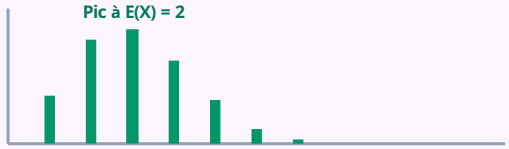
Modélise le nombre de succès k obtenus lors de la répétition de n **épreuves de Bernoulli indépendantes** et identiques
de paramètre p (tirage avec remise, 2 issues : Succès / Échec).

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ avec } C_n^k = n!/(k!(n-k)!) \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

2 Allure Graphique & Répartition des Probabilités



k (succès) — Cas symétrique : B(1 0 ;



k (succès) — Cas asymétrique à gauche : B(1 0 ;

3 Intérêt Théorique

Cas Typiques d'Utilisation

- **Sûreté / Fiabilité :** redondance active (systèmes k parmi n).
- **Contrôle qualité :** proportion d'items défectueux dans un lot.
- **Réseaux & Télécoms :** détection du nombre de paquets perdus.

Influence de n et p

- **Symétrie ($p = 0{,}5$) :** cloche discrète symétrique centrée en $n/2$.
- **Asymétrie :** déport à gauche si $p < 0,5$; à droite si $p > 0,5$.
- **Convergence :** quand n est grand ($np \geq 5$), tend vers la Loi Normale.

4 Exemple Concret : Tolérance aux Pannes d'un Système Critique

Énoncé : Un module d'avionique embarque $n = 5$ **calculateurs indépendants**. Le système fonctionne si **au moins 3** sont opérationnels (architecture redondante *3 parmi 5*). La fiabilité unitaire est $p = 0,90$ (échec unitaire : $1 - p = 0,10$).

Soit $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,90)$ le nombre de calculateurs fonctionnels. On calcule la fiabilité globale $R_{système} = P(X \geq 3)$:

P(X = 3)
$C_5^3 (0,9)^3 (0,1)^2$
= **0,0729** (7,29 %)

P(X = 4)
$C_5^4 (0,9)^4 (0,1)^1$
= **0,32805** (32,81 %)

P(X = 5)
$C_5^5 (0,9)^5 (0,1)^0$
= **0,59049** (59,05 %)

FIABILITÉ GLOBALE
R = 99,1 4 %
(vs 90 % sans redondance)